

Inhoudsopgave

I	Directe methodes	1
1	Inleiding	3
1	Wat is numerieke wiskunde	3
1.1	Zorg voor de nauwkeurigheid	3
1.2	Van numerieke methode naar algoritme	4
1.3	Zorg voor efficiëntie	5
1.4	Het in gebreke blijven van de klassieke wiskunde	8
2	Wat staat de lezer te wachten?	8
3	Appendices	9
3.1	Beschrijving van algoritmes	9
3.2	Numerieke software	10
3.3	Boeken	12
2	Foutenanalyse	13
1	Inleiding	13
2	Absolute en relatieve fout	13
2.1	Absolute fout	14
2.2	Relatieve fout	14
3	Getallenvoorstelling	15
3.1	Klassieke voorstelling	15
3.2	Bewegende kommavoorstelling	15
4	Juiste cijfers	16
4.1	Verband tussen absolute fout en aantal juiste cijfers	16
4.2	Absolute fout en aantal juiste cijfers na de komma	18
4.3	Verband tussen relatieve fout en aantal juiste beduidende cijfers	19
5	Afrondingsfouten in de computer	21
5.1	Het getallenbereik O_{real}	21
5.2	De notatie fl	21
5.3	De machinenauwkeurigheid	22
5.4	Elementaire bewerkingen in O_{real}	23
5.5	De IEEE Standaard	24
5.6	Een voorbeeld	25
6	Voortplanting van fouten doorheen bewerkingen	26
6.1	De optelling	27
6.2	De vermenigvuldiging	28
6.3	Foutenvoortplanting doorheen differentieerbare functies	29
7	Numerieke stabiliteit en conditie	30

7.1	Beschrijving van een numeriek probleem	30
7.2	Conditie van een numeriek probleem	31
7.3	Numerieke stabiliteit van een methode	33
7.4	Voorbeelden	36
8	Oefeningen	39
9	Appendix	40
9.1	De Landau symbolen	40
9.2	Software	41
3	Stelsels lineaire vergelijkingen	43
1	Het oplossen van driehoekige stelsels	44
2	Oplossen van een regulier stelsel met Gauss	45
2.1	Het principe	46
2.2	Matrixnotatie en transformaties	47
2.3	Equivalente stelsels en matrices	48
2.4	Elementaire transformaties en elementaire matrices	48
2.5	Het terugbrengen van een matrix tot boventrapeziumvorm	50
2.6	Eenvoudige Gausseliminatie	53
3	De methode van Gauss met pivotering	55
3.1	De transformatie van een reguliere matrix tot driehoeksvorm	55
3.2	De methode van Gauss met pivotering	56
4	Vergelijking met de regel van Cramer	56
5	Het berekenen van een determinant	58
6	Het oplossen van meerdere stelsels met dezelfde A	59
6.1	Alle rechterleden zijn vooraf gekend	59
6.2	De rechterleden zijn niet gelijktijdig gekend	60
7	Factorizatie van een matrix	60
7.1	De permutatie P	60
7.2	De transformatiematrix T	60
8	De oplossing van meerdere stelsels hernomen	63
9	Conditie van een stelsel vergelijkingen	64
9.1	Matrixnormen	64
9.2	Conditie van een stelsel	66
9.3	Het conditiegetal $\kappa(A)$	67
9.4	Meetkundige interpretatie	68
10	Stabiliteit van de Gausseliminatie en optimale pivotering	69
10.1	Een voorbeeld van foutenanalyse	69
10.2	Gausseliminatie met optimale rijverwisselingen	71
10.3	Een voorbeeld	72
10.4	De residus als maat voor de stabiliteit	72
10.5	Conditie van de deelstappen	74
11	De methode van Crout voor het oplossen van een stelsel	74
11.1	De formules van Crout	75
11.2	Bruikbaarheid van de formules van Crout	76
11.3	Verband met de Gausseliminatie	76
11.4	De methode van Crout met optimale pivotering	77
11.5	Het oplossen van een stelsel met Crout	78

11.6	De numerieke stabiliteit van de methode van Crout	79
12	Het oplossen van speciale stelsels	80
13	Stabieler methodes (Orthogonale transformaties)	81
14	Een algemene situering	82
15	Oefeningen	83
16	Appendices	84
16.1	Sommatieformules	84
16.2	Normen	85
16.3	Software	85
4	Veelterminterpolatie	89
1	Wat is veelterminterpolatie?	89
2	Waarom interpoleren?	89
3	De interpolerende veelterm	90
3.1	Definitie	90
3.2	Bestaan en enig zijn van de interpolerende veelterm	90
4	Interpolatieproblemen	91
4.1	Het coëfficiëntenprobleem	91
4.2	Het waardeprobleem	92
5	Conditie en stabiliteit	92
5.1	Conditie van het coëfficiëntenprobleem	92
5.2	Conditie van het waardeprobleem	93
5.3	Stabiliteit	93
6	De interpolatiefout	94
7	Verder onderzoek van de interpolatiefout	96
7.1	Invloed van de functie $f(x)$	96
7.2	Invloed van het interpolatieinterval	98
7.3	Invloed van de factor $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$	98
7.4	Bruikbaarheid van de formule voor $E_n(x)$	99
8	Interpolatie volgens Lagrange	100
8.1	De interpolerende veelterm	100
8.2	De veelterm van Lagrange voor equidistante punten	101
8.3	Lineaire interpolatie	101
8.4	Nut van de formule van Lagrange	102
9	Interpolatie volgens Newton	102
9.1	Motivatie	102
9.2	De formule van Newton	102
9.3	Gedeelde differenties	103
9.4	De tabel der gedeelde differenties	105
9.5	Algoritmes voor Newtoninterpolatie	107
9.6	De interpolatiefout	112
9.7	De afgebroken Taylorreeks als extrapolerende veelterm	113
9.8	De Newtonveelterm voor equidistante punten	114
9.9	Nota over differenties	118
10	Transformaties	119
10.1	Herleiden van het interval	119
10.2	Transformatie van de veranderlijken	119

10.3	Differenties en veeltermen	121
11	Hermite interpolatie	122
11.1	De methode der onbepaalde coëfficiënten	122
11.2	Confluente interpolatiepunten	122
12	Oefeningen	124
13	Appendices	129
13.1	Stellingen van Taylor en Rolle	129
13.2	Stelling van volledige inductie	129
13.3	Software	129
5	Numerieke differentiatie	131
1	Numerieke differentiatie door afgeleiden van de interpolerende veelterm	131
2	Conditie en stabiliteit	132
2.1	Conditie	132
2.2	Stabiliteit	132
3	Numerieke differentiatie volgens Lagrange	133
4	Numerieke differentiatie volgens Newton	134
5	Met equidistante punten	134
5.1	Met voorwaartse differenties	134
5.2	Met centrale differenties	134
6	Hogere afgeleiden	136
7	Eenvoudige formules voor afgeleiden	136
8	Oefeningen	137
9	Appendix: Software	138
6	Numerieke integratie	139
1	Interpolerende kwadratuurformules	139
2	Conditie en stabiliteit	140
2.1	Conditie	140
2.2	Stabiliteit	141
3	De integratiefout	141
4	De nauwkeurigheidsgraad	142
5	Kwadratuurformules voor niet equidistante punten	142
6	De formules van Newton-Cotes	143
7	Een integratieproces en zijn convergentie	145
8	Samengestelde regels	146
9	De boven- en ondersom	147
10	De middelpuntsregel	148
11	De trapeziumregel	149
12	De regel van Simpson	150
13	Automatische integratie	151
13.1	Het stopcriterium	152
13.2	Het opstellen van de rij benaderingen	152
13.3	Een voorbeeld	155
14	Adaptieve integratie	156
15	Andere kwadratuurformules	157
16	Oefeningen	157

17	Appendices	158
17.1	Middelwaarde en tussenliggende waarde	158
17.2	Software	159
7	Differentiaalvergelijkingen	161
1	Definities	161
2	Waardeprobleem en coëfficiëntenprobleem	162
3	Methode van de Taylorreeks	163
4	Methode van Euler	163
5	Discretisatiefout en convergentieorde	165
6	Methode van Cauchy	167
7	Methode van Heun	168
8	Runge-Kutta methodes	170
9	Runge-Kutta methodes voor stelsels	173
10	Meerstapsmethodes	174
10.1	Adams formules	174
10.2	Adams-Bashforth formules	174
10.3	Adams-Moulton formules	176
10.4	Adams-Bashforth-Moulton formules	177
10.5	Algemene predictor-corrector methodes	177
10.6	De BDF methodes	177
11	Controle van de staplengte	179
11.1	Foutenschatting bij Runge-Kutta methodes	179
11.2	Foutenschatting bij predictor-corrector methodes	179
12	Conditie en stabiliteit	179
12.1	Conditie	179
12.2	Stabiliteit	180
12.3	Stijve differentiaalvergelijkingen	183
13	Welke methode kiezen?	183
14	Oefeningen	184
15	Appendices	186
15.1	Lipschitz continuïteit	186
15.2	Software	187

II Iteratieve methodes 189

1	Inleiding	191
1	Voorbeelden uit deel I	191
2	Algemene kenmerken	191
3	Overzicht van deel II	193
2	Het oplossen van niet-lineaire vergelijkingen	195
1	Over complexiteit	195
2	De methode van het midden of bisectie-methode	196
3	De secant-methode (lineaire interpolatie)	199
4	De regula falsi	204
5	Het Dekker-Brent algoritme	207

6	De methode van Newton-Raphson	209
7	De methode van Muller	213
8	Inverse interpolatie	216
9	De methode van Halley	217
10	Over het bepalen van startwaarden	218
11	Indeling van iteratieve methodes	220
12	Substitutiemethodes	220
	12.1 Meetkundige interpretatie van substitutiemethodes	221
	12.2 Het opstellen van substitutiemethodes en consistentie	221
13	Bestaan en enig zijn van een vast punt	223
14	Convergentie van substitutiemethodes	224
	14.1 Convergentie naar een vast punt	224
	14.2 Convergentie voor wortels	225
	14.3 Praktische bruikbaarheid van convergentiestellingen	225
	14.4 Gevalstudie: de methode van Newton-Raphson.	226
15	Convergentiesnelheid van rijen	228
	15.1 De convergentiefactor	228
	15.2 Orde van convergentie	231
16	Efficiëntie van een iteratieproces	234
17	Convergentieversnelling	235
	17.1 Methode van Aitken	235
	17.2 Methode van Steffensen	236
18	De conditie van een wortel	238
19	Stabiliteit van een substitutiemethode	239
20	Het stopcriterium	241
	20.1 Algemene beschouwingen	241
	20.2 Een uitgewerkt voorbeeld: het berekenen van $\sqrt{a}$	244
21	Het opzoeken van complexe wortels	247
22	Het opzoeken van meerdere wortels (deflatie)	251
23	Oefeningen	252
24	Appendices	255
	24.1 De impliciete functiestelling	255
	24.2 De afgeleide van een complexe functie	256
	24.3 Referentie	256
	24.4 Software	257
3	Stelsels niet-lineaire vergelijkingen	259
1	De bissectie-methode	259
2	De secant-methode	260
3	De Newton-Raphson methode	261
4	Vereenvoudigde Newton-Raphson methodes	263
5	Stopcriterium	267
6	Oefeningen	267
7	Appendix: Software	268

4	Het iteratief oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen	269
1	De methodes van Jacobi en Gauss-Seidel	269
1.1	De methode van Jacobi (totale stap)	269
1.2	Methode van Gauss-Seidel (enkelvoudige stap)	270
1.3	De methodes in matrixnotatie	270
2	Convergentie van de methodes	271
3	Toepassingsgebied	273
4	Oefeningen	273
5	Appendix: Software	273
5	Veeltermvergelijkingen	275
1	Bewerkingen met veeltermen	275
1.1	Evaluatie van een veelterm (Hornerschema)	275
1.2	Het evalueren van afgeleiden	277
1.3	Evalueren van een reële veelterm voor een complexe waarde	278
2	Voorbeelden	280
2.1	De methode van Newton-Raphson	281
2.2	Bijkomende bedenkingen	282
3	De methode van Bairstow	283
4	Slotbedenkingen	285
5	Oefeningen	285
6	Appendix: Software	286
6	Het berekenen van eigenwaarden	287
1	Definities en eigenschappen	287
1.1	Eigenwaarden en eigenruimten	287
1.2	Gelijkvormige en equivalente matrices	288
1.3	Diagonaliseerbare matrices	288
1.4	De karakteristieke vergelijking	288
2	Het berekenen van een dominante eigenwaarde	289
3	Het berekenen van de kleinste eigenwaarde	291
4	Het berekenen van andere eigenwaarden	291
5	Voorbeeld	291
6	Slotbemerkingen en samenvatting	292
7	Oefeningen	294
8	Appendix	294
9	Appendix: Software	295
7	Optimalisatie van een functie in één veranderlijke	297
1	Situering van het probleem	297
2	Het gebruik van afgeleiden	298
3	Veelterminterpolatiemethodes	298
4	Methodes voor niet-differentieerbare functies	299
4.1	Methode voor intervalreductie	300
4.2	De dichotomie-methode	301
4.3	Methode van de gulden snede	302
5	Een praktisch algoritme	304

6	Oefeningen	306
7	Appendix: Software	306
8	Optimalisatie in meerdere veranderlijken	307
1	Definities en eigenschappen	307
2	Nodige en voldoende voorwaarden voor een minimum	312
3	Conditie van een optimalisatieprobleem	314
4	Afdalingsmethodes	315
5	De methode der steilste afdaling	318
6	De methode van Newton-Raphson	322
7	Methodes zonder afgeleiden	326
8	Kleinste kwadraten problemen en stelsels	326
	8.1 Situering van het probleem	327
	8.2 De methode van Gauss-Newton	327
9	Oefeningen	329
10	Appendix	330
	10.1 Lineaire algebra	330
	10.2 Software	331