Inhoud

Inleiding en overzicht **1**

1 Kansrekenen **3**

1.1 Definities van de begrippen in een kansruimte 4

1.1.1 Het experiment 4

1.1.2 De uitkomst van een experiment, het universum 4

1.1.3 Gebeurtenissen 4

1.1.4 Mogelijke benaderingen van het kansbegrip 5

1.2 Eigenschappen van een kansruimte 7

1.2.1 De kans op de onmogelijke gebeurtenis 7

1.2.2 De complementsregel 8

1.2.3 De verschilregel 9

1.2.4 De wet van Boole (veralgemeende somregel) 9

1.2.5 Eindige en aftelbare somregels 10

1.2.6 Uitbreiding van de wet van Boole 11

1.2.7 Partiële ordening 11

1.2.8 Opbouw van eindige kansruimten 12

1.2.9 Opmerkingen 13

1.3 Uniforme kansruimten 13

1.3.1 Definitie 13

1.3.2 Eigenschappen 13

1.3.3 Tellen van uitkomsten - combinatieleer 14

1.3.4 Enkele voorbeelden 16

1.3.5 Uniforme kansruimten op oneindige verzamelingen . . . 17
1.4 Voorwaardelijke kans . . . 18
1.4.1 Definitie . . . 18
1.4.2 Voorbeeld . . . 19
1.4.3 Ontbindingsregel - wet van de totale kans . . . 19
1.4.4 De regel van Bayes . . . 20
1.4.5 Kettingregel . . . 24
1.4.6 Enkele voorbeelden en toepassingen . . . 25
1.4.7 Rekenen met a posteriori kansen . . . 29
1.5 Onafhankelijke gebeurtenissen . . . 30
1.5.1 Voorbeelden - definitie . . . 30
1.5.2 Productregel en andere eigenschappen . . . 31
1.5.3 Onafhankelijke en disjuncte gebeurtenissen . . . 33
1.5.4 Onafhankelijkheid in a posteriori totale kans . . . 34
1.5.5 Toepassing 1: netwerken en productieketens . . . 34
1.5.6 Kans op onderlinge ondeelbaarheid . . . 37
1.5.7 Onafhankelijkheid van meer dan twee gebeurtenissen . . 39
1.5.8 Het probleem van ridder de Méré . . . 39
1.6 Oefeningen basis kansrekenen, reeks A . . . 41
1.6.1 Opgaven . . . 41
1.6.2 Antwoorden . . . 44
1.7 Oefeningen basis kansrekenen, reeks B . . . 45
1.7.1 Opgaven . . . 45
1.7.2 Antwoorden . . . 49

2 Toevalsveranderlijken 51
2.1 Toevalsveranderlijke of stochastische variabele . . . 51
2.1.1 Het begrip toevalsveranderlijke . . . 51
2.1.2 Verband met uitkomstenverzamelingen en kansfuncties . 52
2.2 Discrete toevalsveranderlijken . . . 53
2.2.1 Kansmassa-functie . . . 53

2.2.2 Cumulatieve verdelingsfunctie 54
2.2.3 Een fundamenteel voorbeeld: Bernoulli-verdeling 55
2.3 Continue toevalsveranderlijken 55
2.3.1 Cumulatieve verdelingsfunctie 55
2.3.2 De kansdichtheidsfunctie 56
2.3.3 Voorbeeld: uniforme verdeling 57
2.3.4 Kwantielfunctie en kwantielen 57
2.4 Gemengde toevalsveranderlijken 58
2.5 Verwachte waarde en variantie 59
2.5.1 Verwachte waarde 59
2.5.2 Variantie en standaard-deviatie 60
2.5.3 Ongelijkheden van Markov en Chebyshev 61
2.5.4 De coëfficiënt van variatie 62
2.5.5 Hogere orde momenten 63
2.5.6 Scheefheid en symmetrie 63
2.5.7 Momentvoortbrengende functie 63
2.5.8 De Sint-Petersburg-paradox 65
2.6 Verwachte waarden en kwantielen 67
2.6.1 Mediaan, gemiddelde en modus 67
2.6.2 Geïntegreerde kwantielfuncties 68
2.7 Oefeningen toevalsveranderlijken, reeks A 70
2.7.1 Opgaven 70
2.7.2 Antwoorden 72
2.8 Oefeningen toevalsveranderlijken, reeks B 72
2.8.1 Opgaven 72
2.8.2 Antwoorden 75

3 Kansmodellen **77**
3.1 Basisprocessen 77
3.1.1 Het Bernoulli-experiment 78
3.1.2 Het Poisson-proces 78

3.1.3 Aggregatie van kleine fluctuaties 78
3.1.4 Transformatie van veranderlijken 78
3.2 Discrete kansmodellen 79
3.2.1 Drie eenvoudige modellen 79
3.2.2 Binomiaalverdeling 81
3.2.3 De hypergeometrische verdeling 83
3.2.4 De negatief-binomiale en geometrische verdeling 84
3.2.5 De Poisson-verdeling 87
3.3 Continue kansmodellen 94
3.3.1 De continue uniforme verdeling 94
3.3.2 De exponentiële verdeling 94
3.3.3 De Erlang-verdeling 97
3.3.4 De Gamma-verdeling 98
3.3.5 De Beta-verdeling 99
3.3.6 De Weibull-verdeling 100
3.3.7 De normale verdeling 101
3.3.8 De lognormale verdeling 106
3.3.9 De logistische verdeling 107
3.3.10 De Cauchy-verdeling 109
3.3.11 De chi-kwadraat-verdeling (χ^2) 110
3.4 Transformaties van toevalsveranderlijken 113
3.4.1 Algemene formules voor verdelingen en dichtheden . . . 113
3.4.2 Toepassing: genereren van toevalsgetallen 114
3.4.3 Gemiddelden, momenten en kwantielen onder transformaties 115
3.5 Oefeningen kansmodellen, reeks A 118
3.5.1 Opgaven 118
3.5.2 Antwoorden 121
3.6 Oefeningen kansmodellen, reeks B 122
3.6.1 Opgaven 122
3.6.2 Antwoorden 126

4 Toevalsvectoren (multivariate toevalsveranderlijken) 129

4.1 Gezamelijke kansmassa, kansdichtheid, kansverdeling 130
4.1.1 Definities en betekenis 130
4.1.2 Eigenschappen 131
4.2 Marginale kansverdelingen 131
4.3 Voorwaardelijke kansverdelingen 133
4.3.1 Voorwaardelijke kansdichtheid 133
4.3.2 Voorwaardelijke kansmassa 134
4.3.3 Voorwaardelijke cumulatieve verdeling 134
4.3.4 Wet van totale kans 134
4.3.5 Regel van Bayes 135
4.4 Onafhankelijkheid 136
4.4.1 Definitie en eigenschappen 136
4.5 Verwachtingswaarden bij toevalsvectoren 138
4.5.1 Algemene definitie 138
4.5.2 Covariantie en correlatie 138
4.6 Transformatie van toevalsvectoren 141
4.6.1 Algemene formule voor dichtheden 141
4.6.2 Lineaire transformaties 143
4.6.3 Niet-lineaire transformaties; eerste orde analyse 145
4.6.4 Sommen van onafhankelijke toevalsveranderlijken; convolutie 146
4.6.5 Extremen van toevalsvectoren, orde-statistieken 148
4.7 Voorwaardelijke verwachting 152
4.7.1 Definitie 152
4.7.2 Voorwaardelijke verwachtingsregel 152
4.7.3 Toepassing: stochastische sommen 154
4.7.4 Lineaire voorwaardelijke verwachtingen 155
4.8 De multivariate normale verdeling 157
4.8.1 De bivariate normale verdeling 157
4.8.2 De multivariate normale verdeling 159

4.8.3 Marginale en voorwaardelijke verdelingen 160
4.8.4 Lineaire transformaties van normale toevalsvectoren . . 160
4.9 Oefeningen toevalsvectoren, reeks A 161
4.9.1 Opgaven 161
4.9.2 Antwoorden 163
4.10 Oefeningen toevalsvectoren, reeks B 164
4.10.1 Opgaven 164
4.10.2 Antwoorden 167

5 Limietstellingen **169**
5.1 Wet van de grote aantallen 169
5.1.1 Formulering 169
5.1.2 Bewijs 170
5.1.3 Speciaal geval: kans als relatieve frequentie 170
5.2 Centrale limietstelling 171
5.2.1 Formulering 171
5.2.2 Interpretatie 172
5.2.3 Formeel bewijs 172

6 Beschrijvende statistiek **175**
6.1 Inleiding 175
6.2 Indeling van gegevens 176
6.2.1 Categorische variabelen 176
6.2.2 Numerieke variabelen 177
6.3 Grafische methoden en tabellen 178
6.3.1 Frequenties weergeven 178
6.3.2 Discrete variabelen en naalddiagrammen 180
6.3.3 Stengel- en bladdiagram 180
6.3.4 Histogram en frequentiepolygoon 182
6.3.5 Puntenwolken 183
6.4 Beschrijvende kengetallen van een steekproef 184
6.4.1 Kengetallen van ligging 185

6.4.2 Kengetallen van spreiding 188
6.4.3 Kengetallen van scheefheid 191
6.4.4 Kengetallen van samenhang tussen steekproeven 192
6.4.5 Boxplots 193
6.5 Indexcijfers 194
6.5.1 Enkelvoudige indexcijfers 194
6.5.2 Samengestelde indexcijfers 195
6.5.3 De Fisherindex 196
6.6 Werken met de software `R` 196
6.6.1 `R` installeren 196
6.6.2 Extra libraries 197
6.6.3 Enkele handige weetjes 197
6.6.4 Grafieken en tabellen met `R` 198
6.6.5 Gemiddelde, percentielen en kwartielen met `R` 200
6.6.6 Kengetallen van spreiding met `R` 200
6.6.7 Genereren van data en berekenen van kwantielen van standaard verdelingen 200
6.7 Oefeningen beschrijvende statistiek 201
6.7.1 Opgaven 201
6.7.2 Antwoorden 203

Bijlage A Kredietdata **205**

Bijlage B Tabel voor de standaardnormale verdeling **209**