2 Verzamelingen, relaties, functies

In paragraaf 2.1 wordt een elementaire inleiding gegeven op de notie van een verzameling. Voortbouwend daarop, wordt in paragraaf 2.2 hetzelfde gedaan voor de notie van een binaire relatie. Dat vormt in paragraaf 2.3 dan weer het vertrekpunt voor een elementaire inleiding tot een bijzondere soort van binaire relaties, namelijk de functies. In paragraaf 2.4 wordt ingegaan op ternaire relaties en andere relaties met meer plaatsen.[1]

2.1 Verzamelingen

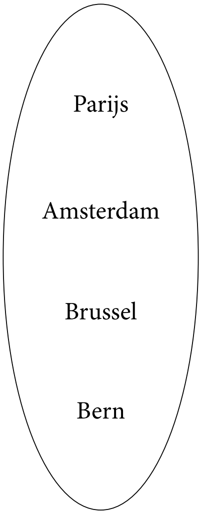
Enkele basisnoties zijn de noties van een verzameling en een element. We noteren een verzameling met behulp van gekrulde haakjes: $\{$ aan de linkerkant en aan de rechterkant. Een verzameling kan elementen hebben. Indien a een element is van een verzameling A wordt dit als volgt genoteerd: $a \in A$. We kunnen in dat geval ook zeggen dat verzameling A het element a bevat. Met behulp van de gekrulde haakjes kan je ook het volgende schrijven: $\{\ldots d \ldots\}$, waarbij … aangeeft dat er eventueel nog elementen in de verzameling zitten. Dus men geeft aan dat iets een element is van een verzameling door het tussen een aan de linkerkant gekruld haakje en een aan de rechterkant gekruld haakje te plaatsen.

> **Voorbeeld 2.1 (Verzameling)**
> Brussel $\in$ {Parijs, Amsterdam, Brussel, Bern}

Sommige verzamelingen kunnen visueel voorgesteld worden met behulp van ovalen of cirkels (bijvoorbeeld figuur 2.1).

We kunnen ook een verzameling beschrijven door de voorwaarden te beschrijven waaraan elementen van die verzameling moeten voldoen. 'De verzameling van alle x waarvoor geldt dat …' wordt als volgt genoteerd:

1 Dit hoofdstuk is grotendeels gebaseerd op Halbach (2010, hoofdstuk 1).



Figuur 2.1: Verzameling

$$\{x \mid x \text{ is } \ldots\},$$

waarbij … vervangen wordt door een bepaalde beschrijving. Het symbool x is een variabele (paragraaf 4.2.1).

> **Voorbeeld 2.2 (Beschrijving van een verzameling)**
> $\{x \mid x$ is een West-Europese hoofdstad die ik bezocht heb$\}$

Er bestaat een lege verzameling, $\{\}$. Soms wordt ook het volgende symbool gebruikt: $\emptyset$. De lege verzameling bevat geen enkel element:

$$\text{voor alle } x,\ x \notin \emptyset$$

Dus Brussel $\notin \emptyset$.

Twee verzamelingen, A en B, zijn identiek als en slechts als A en B dezelfde elementen bevatten (met andere woorden, voor alle x, $x \in A$ als en slechts als $x \in B$).

> **Voorbeeld 2.3 (Identieke verzamelingen)**
> $$\begin{aligned}\{\text{Parijs, Amsterdam, Brussel, Bern}\} &= \\ \{\text{Bern, Brussel, Parijs, Amsterdam}\}\end{aligned}$$

Merk op dat de volgorde van de opgesomde elementen niet uitmaakt.

Enkele belangrijke verzamelingtheoretische noties zijn die van een deelverzameling, de vereniging van verzamelingen en de doorsnede van verzamelingen.

Definitie 2.1 (Deelverzameling)
Verzameling A is een deelverzameling van verzameling B, genoteerd $A \subseteq B$, als en slechts als, voor alle x, indien $x \in A$, dan $x \in B$.

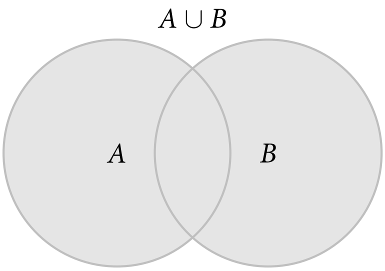
Voorbeeld 2.4 (Deelverzameling)
De verzameling van alle hoofdsteden uit de Lage Landen die ik bezocht heb, is een deelverzameling van de verzameling van alle West-Europese hoofdsteden die ik bezocht heb.

Merk ook op dat elke verzameling ook een deelverzameling is van zichzelf: als $x \in A$, dan $x \in A$. Wanneer A een deelverzameling is van B maar verschilt van B, dan spreken we over een 'eigenlijke deelverzameling', genoteerd $A \subset B$.

Definitie 2.2 (Vereniging van verzamelingen)
De vereniging van de verzamelingen A en B, genoteerd $A \cup B$, is gelijk aan:

$$\{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}.$$

Voorbeeld 2.5 (Vereniging van verzamelingen)
De vereniging van de verzameling van alle West-Europese hoofdsteden die ik bezocht heb en de verzameling van alle Zuid-Europese hoofdsteden (Lissabon, Madrid, Rome) die ik bezocht heb, bevat exact de volgende elementen: Parijs, Amsterdam, Brussel, Bern, Lissabon, Madrid, Rome.

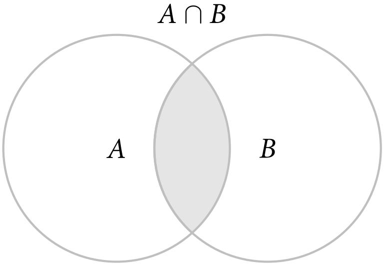


Figuur 2.2: Vereniging van verzamelingen

Definitie 2.3 (Doorsnede van verzamelingen)
De doorsnede van de verzamelingen A en B, genoteerd $A \cap B$, is gelijk aan:

$$\{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}.$$

Voorbeeld 2.6 (Doorsnede van verzamelingen)
De doorsnede van de verzameling van alle West-Europese hoofdsteden die ik bezocht heb en de verzameling van alle steden waarin ik gewoond heb, bevat exact de volgende elementen: Brussel.



Figuur 2.3: Doorsnede van verzamelingen

Definities 2.2 en 2.3 worden geïllustreerd in respectievelijk figuren 2.2 en 2.3.

2.2 Binaire relaties

Sommige uitdrukkingen zijn zogeheten eenplaatsige predicaten – zie ook paragraaf 4.1.1. Dat wil zeggen dat ze met één naam gecombineerd moeten worden om een zin te vormen.

Voorbeeld 2.7 (Eenplaatsig predicaat)

- Eenplaatsig predicaat: '… is een stad.'
- Zin gevormd door combinatie van een eenplaatsig predicaat met een naam: 'Brussel is een stad.'

Eenplaatsige predicaten kunnen gebruikt worden om verzamelingen van individuele objecten te beschrijven. Sommige uitdrukkingen zijn zogeheten tweeplaatsige predicaten – zie ook paragraaf 4.1.1. Dat wil zeggen dat ze met twee namen gecombineerd moeten worden om een zin te vormen.

Voorbeeld 2.8 (Tweeplaatsig predicaat)
- Tweeplaatsig predicaat: '… is een grotere stad dan …'.
- Zin gevormd door combinatie van een tweeplaatsig predicaat met twee namen: 'Parijs is een grotere stad dan Brussel.'

Tweeplaatsig predicaten kunnen gebruikt worden om verzamelingen van *geordende paren* te beschrijven. We noteren een geordend paar met behulp van vishaakjes: $\langle$ aan de linkerkant en $\rangle$ aan de rechterkant. Het geordende paar met de elementen d, e wordt dan als volgt genoteerd: $\langle d, e\rangle$.

Voorbeeld 2.9 (Geordend paar)
⟨Parijs, Brussel⟩

Sommige geordende paren kunnen visueel voorgesteld worden met behulp van pijlen (bijvoorbeeld figuur 2.4).

$$\text{Parijs} \longrightarrow \text{Brussel}$$

Figuur 2.4: Geordend paar

Twee geordende paren, $\langle x, y\rangle$ en $\langle x_1, y_1\rangle$, zijn identiek als en slechts als $x = x_1$ en $y = y_1$. Merk op dat de identiteitsvoorwaarde voor geordende paren verschilt van de identiteitsvoorwaarde voor verzamelingen:

$$\{\text{Parijs, Brussel}\}$$

en

$$\{\text{Brussel, Parijs}\}$$

zijn dezelfde verzameling, terwijl

$$\langle\text{Parijs, Brussel}\rangle$$

en

$$\langle \text{Brussel, Parijs} \rangle$$

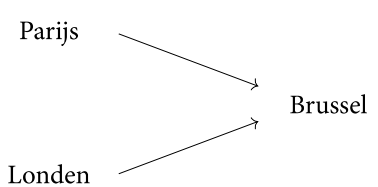
verschillende geordende paren zijn.

Met behulp van de noties van een verzameling en een geordend paar kan de notie van een binaire relatie gedefinieerd worden.

Definitie 2.4 (Binaire relatie)
Een verzameling is een binaire relatie als en slechts als ze uitsluitend geordende paren bevat.

Voorbeeld 2.10 (Binaire relatie)
$\{\langle$Parijs, Brussel$\rangle$, $\langle$Londen, Brussel$\rangle, \ldots\}$

Sommige binaire relaties kunnen visueel voorgesteld worden met behulp van pijldiagrammen (bijvoorbeeld figuur 2.5).



Figuur 2.5: Binaire relatie

2.3 Functies

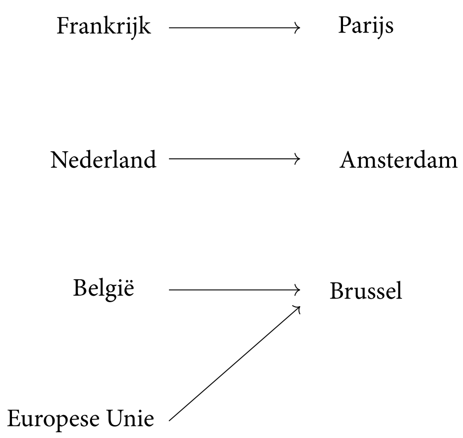
Met behulp van de notie van een binaire relatie kan de notie van een functie gedefinieerd worden.

Definitie 2.5 (Functie)
Een binaire relatie f is een functie als en slechts als, voor alle x, y, z, als $\langle x, y \rangle \in f$ en $\langle x, z \rangle \in f$, dan $y = z$.

Voorbeeld 2.11 (Functie)
$\{\langle x, y\rangle \mid \text{de hoofdstad van } x \text{ is } y\}$

$$\{\langle \text{Frankrijk, Parijs}\rangle, \langle \text{Nederland, Amsterdam}\rangle, \langle \text{België, Brussel}\rangle, \langle \text{Europese Unie, Brussel}\rangle, \ldots\}$$

Sommige functies kunnen visueel voorgesteld worden (bijvoorbeeld figuur 2.6). Merk op dat uit de definitie van een functie volgt dat uit elk element juist één pijl mag vertrekken.



Figuur 2.6: Functie

Definitie 2.6 (Domein van een functie)
Het domein van een functie f is gelijk aan

$$\{x \mid \text{er is een } y \text{ zodanig dat } \langle x, y\rangle \in f\}.$$

Voorbeeld 2.12 (Domein van een functie)
Neem voorbeeld 2.11 als uitgangspunt. Het domein is gelijk aan:

$$\{\text{Frankrijk, Nederland, België, Europese Unie}, \ldots\}.$$

Definitie 2.7 (Bereik van een functie)
Het bereik van een functie f is gelijk aan

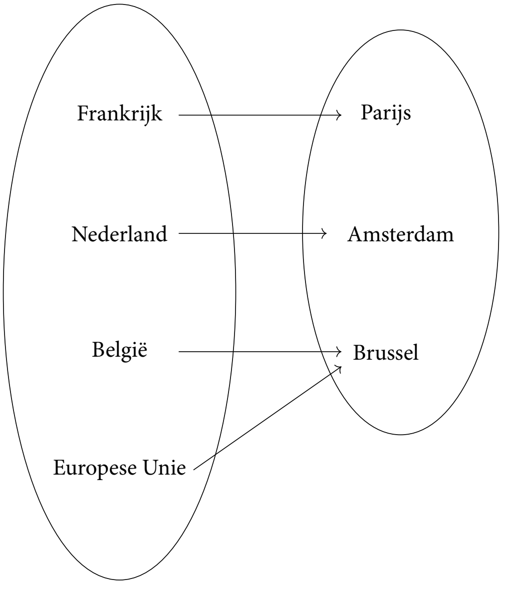
$$\{x \mid \text{er is een } y \text{ zodanig dat } \langle y, x\rangle \in f\}.$$

Voorbeeld 2.13 (Bereik van een functie)
Neem voorbeeld 2.11 als uitgangspunt. Het bereik is gelijk aan:

$$\{\text{Parijs, Amsterdam, Brussel,} \ldots\}.$$

Definitie 2.8 (Codomein van een functie)
Een codomein van een functie f is een verzameling die het bereik van f als deelverzameling heeft.

Merk op dat het bereik van een functie f ook een codomein van f is. Als A het domein van een functie f is en als B een codomein van f is, wordt dit genoteerd als volgt: $f : A \to B$. Het domein en een codomein van een functie kunnen soms visueel voorgesteld worden aan de hand van ovalen of cirkels en pijlen (bijvoorbeeld figuur 2.7).



Figuur 2.7: Domein en bereik van een functie

Als x behoort tot het domein van een functie f, dan noteren we de unieke y zodanig dat $\langle x, y \rangle \in f$ als volgt: $f(x)$. Men spreekt in dit verband ook over de 'functiewaarde'.

Voorbeeld 2.14 (Functiewaarde)
Neem voorbeeld 2.11 als uitgangspunt. Dan is $f(\text{België}) = \text{Brussel}$.

2.4 Niet-binaire relaties

Sommige uitdrukkingen zijn zogeheten drieplaatsige predicaten – zie ook paragraaf 4.1.1. Dat wil zeggen dat ze met drie namen gecombineerd moeten worden om een zin te vormen.

Voorbeeld 2.15 (Drieplaatsig predicaat)

- Drieplaatsig predicaat: '… is verder gelegen van … dan …'.
- Zin gevormd door de combinatie van een drieplaatsig predicaat met drie namen: 'Parijs is verder gelegen van Antwerpen dan Brussel.'

Drieplaatsig predicaten kunnen gebruikt worden om verzamelingen van *geordende drietallen* te beschrijven. We noteren een geordend drietal met behulp van vishaakjes: $\langle$ aan de linkerkant en $\rangle$ aan de rechterkant. Het geordende drietal met de elementen d, e, f wordt dan als volgt genoteerd: $\langle d, e, f \rangle$.

Voorbeeld 2.16 (Geordend drietal)
⟨Parijs, Antwerpen, Brussel⟩

Twee geordende drietallen, $\langle x, y, z \rangle$ en $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$, zijn identiek als en slechts als $x = x_1$, $y = y_1$ en $z = z_1$.

Definitie 2.9 (Ternaire relatie)
Een ternaire relatie is een verzameling van geordende drietallen.

We kunnen verdergaan met vierplaatsige predicaten, geordende viertallen en quaternaire relaties, enzovoort. In het algemeen spreken we dan over n-plaatsige predicaten, geordende n-tallen en n-plaatsige relaties. Een eenplaatsige relatie zou dan een relatie van geordende eentallen zijn, maar een geordend eental wordt gelijkgesteld met het element dat het bevat: $\langle d \rangle = d$. Daarom is een eenplaatsige relatie niets meer dan een verzameling.